

В. А. Амбарцумян

### Точечный источник света в мутной среде

Как известно, наиболее сложным разделом теории светового поля является раздел, посвященный рассеянию света в мутной среде. В работах последних лет вопрос о световом режиме в мутной среде в случае плоскопараллельных слоев нашел подробное освещение. Однако, другой идеальный случай, именно, случай точечного источника в однородной мутной среде, заполняющей все пространство, почти совершенно не исследован. Настоящая статья содержит некоторые результаты, относящиеся к этой проблеме, для частного случая сферической индикатрисы рассеяния.

Пусть  $\alpha$  есть коэффициент экстинкции. В силу однородности среды он постоянен во всем пространстве, также как коэффициент рассеяния  $\sigma$ . Обозначим:

$$\lambda = \frac{\sigma}{\alpha} \quad (1)$$

и введем вместо прямоугольных координат  $x, y, z$  величины

$$u = \alpha x; \quad v = \alpha y; \quad w = \alpha z \quad (2)$$

Точно также будем обозначать:

$$\tau = \alpha \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \alpha r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (3)$$

Величину  $\tau$  можно назвать оптическим расстоянием до начала координат. Пусть точечный источник помещается в начале координат. В силу сферической симметрии задачи коэффициент излучения  $\eta$  будет зависеть только от  $\tau$ , а следовательно и отдача

$$B(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\alpha} \quad (4)$$

будет функцией, зависящей только от  $\tau$ . Так как мы предполагаем сферическую индикатрису рассеяния, то величина  $B(\tau)$  от направления не зависит.

Если  $4\pi^2 S$  есть полный поток излучения, испускаемый нашим точечным источником, то поток прямого излучения на расстоянии  $r$  от начала координат через единичную площадку нормальную к радиусу-вектору, проведенному от источника, будет равен

$$F = \frac{\pi S}{r^2} e^{-\alpha r}$$

или

$$F = \frac{\pi S \alpha^2}{\tau^2} e^{-\tau} \quad (5)$$

Поэтому условие лучевого равновесия для рассматриваемого случая по аналогии с плоскопараллельным случаем переписется в виде:

$$4\pi B(\tau) = \frac{\lambda \pi S \alpha^2}{\tau^2} e^{-\tau} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\tau_1) e^{-[(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2]^{1/2}}}{(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2} du_1 dv_1 dw_1$$

или

$$B(\tau) = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} + \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\tau_1) e^{-[(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2]^{1/2}}}{(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2} du_1 dv_1 dw_1 \quad (6)$$

Неоднородное интегральное уравнение (6) и подлежит нашему рассмотрению.

Функция  $B(\tau)$ , стоящая в левой части, зависит через  $\tau$  от переменных  $u, v, w$  также как правая часть уравнения (6). Помножим обе части (6) на  $dvdw$  и проинтегрируем. Для левой части будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}) dvdw = 2\pi \int_0^{\infty} B(\sqrt{u^2 + t^2}) t dt \quad (7)$$

где  $t^2 = u^2 + w^2$ . Введем в правой части (7) переменную интегрирования  $\tau = \sqrt{u^2 + t^2}$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) dvdw = 2\pi \int_{|u|}^{\infty} B(\tau) \tau d\tau \quad (8)$$

Точно также

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} dvdw = 2\pi \int_{|u|}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = 2\pi \text{Ei } |u| \quad (9)$$

Наконец

$$\int \int \frac{e^{-[(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2]^{1/2}}}{(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2} dvdw = 2\pi \text{Ei } |u-u_1| \quad (10)$$

Поэтому (6) переписется в виде

$$\int_{|u|}^{\infty} B(\tau) \tau d\tau = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} \text{Ei } |u| + \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei } |u-u_1| du_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau_1) dv_1 dw_1 \quad (11)$$

или на основании (8)

$$\int_{|u|}^{\infty} B(\tau) \tau d\tau = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} \text{Ei } |u| + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei } |u-u_1| du_1 \int_{|u_1|}^{\infty} B(\tau_1) \tau_1 d\tau_1 \quad (12)$$

Обозначим:

$$\int_{|\tau|}^{\infty} B(\tau) \tau d\tau = A(\tau) \quad (13)$$

Тогда

$$A(\tau) = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} \text{Ei}(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei}|\tau - t| A(t) dt \quad (14)$$

Это интегральное уравнение и подлежит нашему исследованию.

Как это следует из общей теории, при  $\lambda < 1$  это уравнение имеет только одно решение, ограниченное при  $|\tau| \rightarrow \infty$ . Мы можем свободный член этого уравнения представить в виде:

$$\frac{\lambda S \alpha^2}{4} \text{Ei}|\tau| = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} \int_1^{\infty} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} \frac{d\xi}{\xi} \quad (15)$$

Поэтому решение (14) можно представить как суперпозицию решений уравнения

$$\beta(\tau, \xi) = e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei}|\tau - t| \beta(t, \xi) dt \quad (16)$$

где  $\beta$  зависит очевидно от параметра  $\xi$ , входящего в свободный член.

Очевидно, что между  $\beta$  и  $A$  будет существовать соотношение:

$$A(\tau) = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} \int_0^1 \beta(\tau, \xi) \frac{d\xi}{\xi} \quad (17)$$

Рассмотрим подробнее уравнение (16) для  $\beta(\tau, \xi)$ . Продифференцируем это уравнение по  $\tau$

$$\frac{d\beta(\tau, \xi)}{d\tau} = -\frac{1}{\xi} \frac{d|\tau|}{d\tau} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei}|\tau - t| \frac{d\beta(t, \xi)}{dt} dt \quad (18)$$

Множитель  $\frac{d|\tau|}{d\tau}$  имеет разрыв в точке  $\tau = 0$ . Поэтому свободный

член уравнения (18) имеет также разрыв, равный  $-\frac{2}{\xi}$ . Нетрудно видеть,

что и решение уравнения (18)  $\frac{d\beta(t, \xi)}{dt}$  при  $t = 0$  имеет разрыв:

$$\left[ \frac{d\beta(t, \xi)}{dt} \right]_{t=+0} - \left[ \frac{d\beta(t, \xi)}{dt} \right]_{t=-0} = -\frac{2}{\xi} \quad (19)$$

Учитывая это, продифференцируем уравнение (18) еще раз по  $\tau$

$$\frac{d^2\beta(t, \xi)}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei}(t - \tau) \frac{d\beta(t, \xi)}{dt} dt +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{\tau} \text{Ei}(t-\tau) \frac{d\beta(t, \xi)}{dt} dt$$

или, если  $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\beta(\tau, \xi)}{d\tau^2} &= \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \text{Ei}x \frac{d\beta(x+\tau, \xi)}{dx} dx - \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \text{Ei}x \frac{d\beta(\tau-x, \xi)}{dx} dx \\ &= \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \text{Ei}x \frac{d\beta(x+\tau, \xi)}{dx} dx + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} \text{Ei}x \frac{d\beta(\tau-x, \xi)}{dx} dx + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{\infty} \text{Ei}x \frac{d\beta(\tau-x, \xi)}{dx} dx \\ &= \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \frac{d^2\beta(t, \xi)}{dt^2} \text{Ei}|\tau-t| dt + \frac{\lambda}{2} \text{Ei}\tau \left[ \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=+0} - \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \text{Ei}\tau \left[ \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=-0} \\ &= \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} - \frac{\lambda}{\xi} \text{Ei}|\tau| + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei}|\tau-t| \frac{d^2\beta(t, \xi)}{dt^2} dt \end{aligned}$$

К тому же выражению (при ином промежуточном преобразовании) мы приходим при  $\tau < 0$ . Итак, второе дифференцирование привело к уравнению для второй производной

$$\frac{d^2\beta(\tau, \xi)}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} - \frac{\lambda}{\xi} \text{Ei}|\tau| + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei}|\tau-t| \frac{d^2\beta(t, \xi)}{dt^2} dt \quad (20)$$

или

$$\frac{d^2\beta(\tau, \xi)}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} - \frac{\lambda}{\xi} \int_0^1 e^{-\frac{|\tau|}{\eta}} \frac{d\eta}{\eta} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei}|\tau-t| \frac{d^2\beta(\tau, \xi)}{dt^2} dt \quad (21)$$

Поскольку свободный член (21) представляет собою суперпозицию величин типа свободного члена (16), то и решение (21) можно представить как суперпозицию решений уравнения (16), т. е.

$$\frac{d^2\beta(\tau, \xi)}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi^2} \beta(\tau, \xi) - \frac{\lambda}{\xi} \int_0^1 \beta(\tau, \eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (22)$$

Это соотношение мы можем рассматривать, как некоторое интегро-дифференциальное уравнение для функции  $\beta(\tau, \xi)$ . Ищем решение этого уравнения в форме:

$$\beta(\tau, \eta) = C(\eta) e^{-k|\tau|} \quad (23)$$

поскольку при  $|\tau| \rightarrow \infty$  функция  $\beta(\tau, \eta)$  должна стремиться к произведению двух функций, одна из которых зависит от  $\tau$ , а другая от  $\eta$ . Подставляя в (22) имеем:

$$C(\xi) = \frac{\lambda \xi}{1 - k^2 \xi^2} \int_0^1 C(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (24)$$

или

$$C(\xi) = \frac{C_\xi}{1 - k^2 \xi^2} \quad (25)$$

где

$$C = \lambda \int_0^1 C(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (26)$$

Подставляя в (26) правую часть (25), мы видим, что должно выполняться соотношение:

$$1 = \lambda \int_0^1 \frac{d\eta}{1 - k^2 \eta^2}$$

которое удовлетворяется только при условии:

$$\lambda = \frac{2k}{\ln \frac{1+k}{1-k}} \quad (27)$$

Это соотношение определяет  $k$  в решении (23).

Для установления значения  $C$  в (25) рассмотрим тождество

$$e^{-k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| e^{-kt} dt \quad (28)$$

где  $k$  предполагается определенным из (27). Преобразуем его

$$e^{-k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^0 \text{Ei} |\tau - t| e^{-kt} dt - \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^0 \text{Ei} |\tau - t| e^{kt} dt + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| e^{-k|t|} dt$$

При  $\tau > 0$  будем отсюда иметь

$$e^{-k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\tau-t)}{\eta}} e^{-kt} dt - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\tau-t)}{\eta}} e^{kt} dt + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| e^{-k|t|} dt \\ = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{\eta} - k} - \frac{1}{\frac{1}{\eta} + k} \right\} \frac{d\eta}{\eta} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| e^{-k|t|} dt$$

т. е.

$$e^{-k\tau} - \lambda k \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{\eta d\eta}{1 - k^2 \eta^2} =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| e^{-k|t|} dt \quad (\tau > 0) \quad (29)$$

Нужно подчеркнуть, что эта формула справедлива при  $\tau > 0$ . Рассматривая теперь тождество

$$e^{k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| e^{kt} dt$$

при отрицательных  $\tau$  будем иметь:

$$e^{k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| e^{kt} dt - \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| e^{-kt} dt +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| e^{-k|t|} dt$$

Преобразуя получаем для  $\tau < 0$ :

$$e^{k\tau} - \lambda k \int_0^1 e^{-\frac{|\tau|}{\eta}} \frac{\eta d\eta}{1 - k^2 \eta^2} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| e^{-k|t|} dt \quad (30)$$

Принимая во внимание, что (29) справедливо при  $\tau > 0$ , а (30) для  $\tau < 0$ , мы можем вообще написать:

$$e^{-k|\tau|} = \lambda k \int_0^1 e^{-\frac{|\tau|}{\eta}} \frac{\eta d\eta}{1 - k^2 \eta^2} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| e^{-k|t|} dt \quad (31)$$

Сравнивая теперь (31) с (16), мы видим, что функция  $e^{-k|t|}$  может быть получена как суперпозиция функций  $\beta(\tau, \xi)$

$$e^{-k|t|} = \lambda k \int_0^1 \frac{\beta(\tau, \eta) \eta d\eta}{1 - k^2 \eta^2} \quad (32)$$

Принимая во внимание, что это равенство справедливо для всех  $\tau$ , применим его к большим  $\tau$ , для чего подставим в него асимптотическое выражение (23), в котором  $C(\eta)$  заменим через (25):

$$1 = \lambda k C \int_0^1 \frac{\eta^2 d\eta}{1 - k^2 \eta^2}$$

откуда

$$C = \frac{1}{\lambda k \int_0^1 \frac{\eta^2 d\eta}{1 - k^2 \eta^2}}$$

Интегрирование дает

$$C = \frac{k}{\lambda \left\{ \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} - 1 \right\}} = \frac{k}{1-\lambda} \quad (33)$$

Итак, согласно (25)

$$C(\xi) = \frac{k}{1-\lambda} \frac{\xi}{1 - k^2 \xi^2} \quad (34)$$

и для больших  $\tau$  мы имеем асимптотическую формулу:

$$\beta(\tau, \xi) = \frac{k}{1-\lambda} \frac{\xi}{1 - k^2 \xi^2} e^{-k|\tau|} \quad (35)$$

Согласно (17) отсюда мы получим выражение для  $A(\tau)$ :

$$A(\tau) = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} \frac{k}{1-\lambda} \int_0^1 e^{-k|\tau|} \frac{d\xi}{1 - k^2 \xi^2}$$

или

$$A(\tau) = \frac{S \alpha^2}{4} \frac{k}{1-\lambda} e^{-k|\tau|} \quad (36)$$

где мы опять воспользовались соотношением (27).

Из (13) и (36) находим:

$$B(\tau) = \frac{S \alpha^2}{4} \frac{k^2}{1-\lambda} \frac{1}{\tau} e^{-k\tau} \quad (37)$$

Это и есть асимптотическое решение нашей задачи.

Август 1943 г.

## The point-source of light Within the scattering medium

By V. A. Ambarzumian

## (Abstract)

The solution of the equation (6) of the point-source problem is reduced to the solution of the equation (16) of the problem of plan-parallel layers. The asymptotic solution of the equation (6) is given.